Die Funktionsgleichung und ihre 1. Ableitung (a = 1)

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ („die Kurve“)

$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$ („die Steigung“)

Die gegebenen Bedingungen

1) $f(k - 1) \cdot f(k + 1) \geq 0$ k ist ganze Zahl (minus, 0 oder plus)
2) $f'(-1/4) = -1/4$
3) $f'(1/4) < 0$

Bedingung 2):

$f'(-1/4) = -1/4$

In die Ableitungsgleichung eingesetzt:

$-1/4 = 3(-1/4)^2 + 2b(-1/4) + c$

$-1/4 = 3/16 - 1/2 \cdot b + c \quad | + 1/2 \cdot b \quad | + 1/4$

$1/2 \cdot b = 7/16 + c \quad | \cdot 2$

$b = 7/8 + 2c$ bzw. $c = 1/2 \cdot b - 7/16$

Bedingung 3):

$f'(1/4) < 0$

In die Ableitungsgleichung eingesetzt, z ist die Differenz zu 0, z muss positiv sein:

$3 \cdot (1/4)^2 + 2 \cdot (7/8 + 2c) \cdot 1/4 + c = -z$

$3/16 + 7/16 + c + c = -z$

$5/8 + 2c = -z \quad | - 5/8 \quad | /2$

$\mathbf{c = -5/16 - z/2}$

Das eingesetzt in den Ausdruck für b:

$b = 7/8 + 2c$

$b = 7/8 - 5/8 - z$

$\mathbf{b = 1/4 - z}$

Aus Bedingung 1) folgt: Die Kurvenpunkte (k|f(k)) (nur die mit k = ganze Zahl werden hier betrachtet) müssen im I. Quadranten (oben rechts) oder im III. Quadranten (unten links) liegen oder auf der x-Achse, damit $f(k - 1) \cdot f(k + 1)$ eine positive Zahl (minus mal minus oder plus mal plus) oder 0 ergibt.

Die Funktionskurve kommt von unten links und geht nach oben rechts, mit einem Schlenker irgendwo in der Mitte.

Wenn man die Nullstellen dieser Funktion kennt, kann man – unter Berücksichtigung der Bedingungen 2) und 3) – die Koeffizienten b und c der Funktionsgleichung bestimmen.

Wenn es nur eine Nullstelle gibt, sind die y-Werte der x-Werte links von der Nullstelle minus und rechts von der Nullstelle plus, so ist Bedingung 1) nicht erfüllt (minus mal plus ergibt minus). Es muss also 2 oder 3 Nullstellen geben. Bei zwei Nullstellen müssen beide ganzzahligen x-Werte im Abstand 1 voneinander liegen, bei drei Nullstellen müssen zwei der drei Nullstellen den Abstand 1 zueinander haben, und der Abstand zur dritten Nullstelle muss ≤ 1 sein, denn sonst wären die y-Werte der ganzzahligen x-Werte links und rechts einer dieser Nullstellen ($x_1 = k - 1$ und $x_2 = k + 1$) minus und plus, Bedingung 1 wäre also nicht erfüllt.

Die Kurve geht durch den Ursprung (0|0), hat also bei x = 0 eine Nullstelle, denn sonst kann es, wegen Bedingung 2) und 3) (Steigung bei x = 0 muss negativ sein), keine zwei ganzzahligen Nullstellen nebeneinander geben. Also gilt d = 0.

Werte für b und c in die Funktionsgleichung eingesetzt:

$f(x) = x^3 + (1/4 - z)x^2 - (5/16 + z/2)x$

Nullstellen gesucht:

$f(x) = 0 = x^3 + (1/4 - z)x^2 - (5/16 + z/2)x$

Nullstelle 1 ergibt sich aus unserer Setzung d = 0: x = 0.

Die anderen Nullstellen hängen mit der Größe von z zusammen.

Also nach z auflösen:

$0 = x^3 + 1/4 \cdot x^2 - zx^2 - 5/16 \cdot x - 1/2 \cdot z \cdot x$

$0 = x^3 + 1/4 \cdot x^2 - 5/16 \cdot x - z(x^2 + 1/2 \cdot x) \quad | + z(x^2 + 1/2 \cdot x)$

$z(x^2 + 1/2 \cdot x) = x^3 + 1/4 \cdot x^2 - 5/16 \cdot x \quad | / (x^2 + 1/2 \cdot x)$

$z = (x^3 + 1/4 \cdot x^2 - 5/16 \cdot x) \; / \; (x^2 + 1/2 \cdot x)$

$z = x \cdot (x^2 + 1/4 \cdot x - 5/16) \; / \; (x^2 + 1/2 \cdot x)$

Eine weitere Nullstelle wird von uns bei x = 1 gesetzt (im Abstand 1 von der zuerst gesetzten Nullstelle x = 0), daraus ergibt sich der Wert für z:

$z = 1 \cdot (1^2 + 1/4 - 5/16) \; / \; (1^2 + 1/2)$

$z = (5/4 - 5/16) \; / \; 3/2$

$z = 15/16 \; / \; 3/2$

$\mathbf{z = 5/8}$

Denkbar wäre auch, die Nullstelle bei x = –1 zu setzen, aber dann wird z negativ, und damit wäre Bedingung 3) nicht erfüllt.

Damit sind jetzt b und c bekannt:

$b = 1/4 - 5/8 \quad \mathbf{b = -3/8}$

$c = -5/16 - 5/16 \quad \mathbf{c = -5/8}$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$\mathbf{f(x) = x^3 - 3/8 \cdot x^2 - 5/8 \cdot x}$

$\mathbf{f(8) = 483}$

Jetzt kann man noch die dritte Nullstelle ausrechnen:

$0 = x^3 - 3/8 \cdot x^2 - 5/8 \cdot x$

$0 = x \cdot (x^2 - 3/8 \cdot x - 5/8)$

$x^2 - 3/8 \cdot x - 5/8 = 0$

$x_{1,2} = 3/16 \pm \sqrt{(9/256 + 160/256)}$

$x_{1,2} = 3/16 \pm 13/16$

$\mathbf{x_1 = -5/8}$ (das ist die dritte gesuchte Nullstelle)

$x_2 = 1$ (das war ja der zweite, gesetzte Nullstellenwert)